九章算術細草圖說

九章算術細草圖說序

莫若作四元玉鑑序謂河洛圖書泄其秘黃帝諡章著之書其章有九其術則二百四十有六始方田終句股包括三才旁通萬有凡言數者莫得而逃焉唐立明算科九章海島共限習三年試九章三條海島一條不特陳其數且欲明其義也自時厥後算科旣廢書亦不彰近時以算名者如王寅旭梅定九諸君子咸未之見迨吾宗東原氏與修四庫全書從永樂大典中錄出一刻於曲阜孔氏再刻於常熟屈氏而古學復興然未及盡求其解也鍾祥李雲門先生博

綜羣書尤精算學推步律呂俱臻微妙於古人立天元一大衍求一正負開方諸術多所發明九章海島更多心得嘗言陳其數者下學之言也知其義者上達之功也有數先有象有象皆可繪舊注所云解此要當以棊者一一顯之於圖於東原氏所謂舛誤不可通者一一疏而通之探賾索隱鉤深致遠臚名標目成式古訓撰九章海島細草圖說共十卷亦猶劉徽析理以辭解體用圖之意也惜未寫定哲人其萎其甥程儀部晴峯謹守遺藁延吳門沈孝廉俠侯至其家算校編輯鳩工付梓以敦元粗聞撰述緣起屬

為識其綱要於時距先生之歿已八年矣敦元既幸
見是書之成復感先生之不及親覩而尤望他種之
陸續綴集也爰不獲辭而系以言開化後學戴敦元
謹撰

重差圖序

圖九望海島舊有圖解餘八圖今所補也同式形兩兩相比所作四率二三率相乘與一四率相乘同積如欲作圖明之第取一三率聯爲一邊又取二四率聯爲一邊作相乘長方圖之自然分爲四冪又以斜弦界爲同式句股形各二則形勢顯矣舊圖於形外別作同積二方至兩形相去遼遠者又必宛轉通之皆可不必也圖中以四邊形五邊形立說似與句股不類然於本形外補作句股形則亦句股也四率比例法在九章粟米謂之今有一爲所有率二爲所求

率三爲所有數四爲所求數在句股則統目之爲率
劉氏注云句率股率見句見股者是也今祗云同式
相比者取省易耳異乘同除則一也鍾祥李潢

劉徽九章算術注原序

昔在庖犧氏始畫八卦以通神明之德以類萬物之情作九九之術以合六爻之變暨於黃帝神而化之引而伸之於是建歷紀協律呂用稽道原然後兩儀四象精微之氣可得而效焉記稱隸首作數其詳未之聞也按周公制禮而有九數九數之流則九章是矣往者暴秦焚書經術散壞自時厥後漢北平侯張蒼大司農中丞耿壽昌皆以善算命世蒼等因舊文之遺殘各稱刪補故校其目則與古或異而所論者多近語也徽幼習九章長再詳覽觀陰陽之割裂總

算術之根源探賾之暇遂悟其意是以敢竭頑魯采其所見爲之作注事類相推各有攸歸故枝條雖分而同本幹者知發其一端而已又所析理以辭解體用圖庶亦約而能周通而不黷覽之者思過半矣且算在六藝古者以賓興賢能教習國子雖曰九數其能窮纖入微探測無方至於以法相傳亦猶規矩度量可得而共非特難爲也當今好之者寡故世雖多通才達學而未必能綜於此耳周官大司徒職夏至日中立八尺之表其景尺有五寸謂之地中說云南戴日下萬五千里夫云爾者以術推之按九章立四

表望遠及因木望山之術皆端旁互見無有超邈若
斯之類然則蒼等爲術猶未足以博盡羣數也徽尋
九數有重差之名原其指趣乃所以施於此也凡望
極高測絶深而兼知其遠者必用重差句股則必以
重差爲率故曰重差也立兩表於洛陽之城令高八
尺南北各盡平地同日度其正中之時以景差爲法
表高乘表間爲實實如法而一所得加表高即日去
地也以南表之景乘表間爲實實如法而一即爲從
南表至南戴日下也以南戴日下及日去地爲句股
爲之求弦即日去人也以徑寸之筩南望日日滿筩

空則定筩之長短以爲股率以筩徑爲句率日去人之數爲大股大股之句卽日徑也雖天圓穹之象猶曰可度又况泰山之高與江海之廣哉徽以爲今之史籍且略舉天地之物考論厥數載之於志以闡世術之美輒造重差并爲注解以究古人之意綴於句股之下度高者重表測深者累矩孤離者三望離而又旁求者四望觸類而長之則雖幽遐詭伏靡所不入博物君子詳而覽焉

目錄 附

方田第一 凡三十八問
粟米第二 凡四十六問
衰分第三 凡二十問
少廣第四 凡二十四問
商功第五 凡二十八問
均輸第六 凡二十八問
盈不足第七 凡二十問
方程第八 凡十八問
句股第九 凡二十四問

九章算術細草圖說卷一

魏　劉　徽　注

唐朝議大夫行太史令上輕車都尉臣李淳風等奉　敕注釋

鍾祥李　潢雲門譔

方田以御田疇界域

今有田廣十五步從十六步問爲田幾何

荅曰一畝

又有田廣十二步從十四步問爲田幾何

荅曰一百六十八步圖從十四廣十二

潢按攷注所云則舊有圖而今亡矣補之

如后

從十四步

廣十二步

如圖廣十二步從十四步相乘得一百六十八步

方田

術曰廣從步數相乘得積步此積謂田冪凡廣從相乘謂之冪

臣淳風等謹按經云廣從相乘得積步注云廣從相乘謂之冪觀斯注意積冪義同以理推之固當不爾何則冪是方面單布之名積乃衆數聚居之稱循名責實二者全殊雖欲同之竊恐

不可今以凡言冪者據廣從之一方其言積者
舉衆步之都數經云相乘得積步即是都數之
明文注云謂之爲冪全乘積步之本意此注前
云積謂田冪於理得通復云謂之爲冪繁而不
當今者注釋存善去非
畧爲科簡遺諸後學

以畝法二百四十步除之即畝數百畝爲一頃

臣淳風等謹按此爲篇端故特舉頃畝二法餘
術不復言者從此可知一畝之田廣十五步從
而疏之令爲十五行即每行廣一步而從十六
步又横而截之令爲十六行即每行廣一步而
從十五步此即從疏横截之步各自爲方凡有
二百四十步爲一畝之地步數正同以此言之
即廣從相乘得積步驗矣二百四十步者
畝法也百畝者頃法也故以除之即得

草曰置廣十五步於上位又置從十六步於下
位上位有十步至十以上一呼下一一一如一

即下一百於中位以上一呼下六一六如六六即
於中位下六十退下位一等收上位一十以上
位五呼下位一一五如五五即於中位下五十以
上五呼下六五六三十即於中位下三十上下
位俱收中位得二百四十爲積步　乃以中位
二百四十步爲實以畝法二百四十步爲法置
下位以下除中得一置上位上下相呼除中位
適盡收下位定上位所得爲一畝合問
草曰置廣十二步於上位又置從十四步於下
位上位有十步至十以上一呼下一一一如一

即下一百於中位以上一呼下四一四如四即於中位下四十退下位一等收上位一十以上位二呼下位一一二如二即於中位下二十以上二呼下四二四如八即於中位下八上下位俱收中位得一百六十八為積步合問

說曰古算用籌漢書云其算法用竹徑一分長六寸二百七十一枚而成六觚為一握孫子算經云凡算之法先識其位一從十橫百立千僵千十相望萬百相當又云六不積五不隻謂算籌也其乘式則置實於上位置法於下位置乘

得數於中位其除式則置實於中位置法於下位置除得數於上位孫子算經所謂乘得在中央除得在上方是也此爲篇端故詳書以存古式後不復言者從此可知

今有田廣一里從一里問爲田幾何

荅曰三頃七十五畝

又有田廣二里從三里問爲田幾何

荅曰二十二頃五十畝

里田

術曰廣從里數相乘得積里以三百七十五乘

之卽畝數按此術廣從里數相乘得積里故方里之中有三頃七十五畝數以乘之卽得畝數也

草曰置廣一里於位展爲三百步亦展從一里爲三百步以乘之得九萬步爲實以畝法二百四十步爲法除之得三百七十五畝收爲三頃七十五畝合問

草曰置廣二里於位以從三里乘之得六里又以三百七十五乘之得二千二百五十畝收爲二十二頃五十畝合問

說曰古者三百步爲里以三百步自乘得九萬

步如畝法而一得三百七十五畝故注云故方里之中有三項七十五畝也術從簡易以廣從里數相乘得積里以三百七十五乘之即畝數可省一通分又省一除也

今有十八分之十二問約之得幾何

答曰三分之二

又有九十一分之四十九問約之得幾何

答曰十三分之七

約分按約分者物之數量不可悉全必以分言之分之為數繁則難用設有四分之二者繁而言之亦可為八分之四約而言之則二分之一也雖則異辭至於為數亦同歸爾法實相

推動有參差故爲
術者先治諸分

術曰可半者半之不可半者副置分母子之數以少減多更相減損求其等也以等數約之等數約之即除也其所以相減者皆等數之重疊故以等數約之

草曰置分母十八於下位置分子十二於上位副之以上減下下位餘六以餘六減副上上位亦餘六是六爲等數也以等數六約十八得三以等數六約十二得二是爲三分之二合問

草曰置分母九十一於下位置分子四十九於上位副之以上減下下位餘四十二以四十二

減副上四十九上位餘七以七減下餘四十二下位亦餘七是七爲等數也以等數七約九十一得十三以等數七約四十九得七是爲十三分之七合問

說曰注云按約分者物之數量不可悉全者全即分母乘全之全謂如法而一得全數也不可悉全者謂實不滿法以法命之是有分也云先治諸分者統約分合分減分課分平分經分乘分而言張邱建亦云學算者不患乘除之爲難而患通分之爲難也

今有三分之一五分之二問合之得幾何

荅曰十五分之十一

又有三分之二七分之四九分之五問合之得幾何

荅曰得一六十三分之五十

又有二分之一三分之二四分之三五分之四問合之得幾何

荅曰得二六十分之四十三

合分臣淳風等謹按合分者數非一端分無定準諸分子雜互羣母參差麁細既殊理難從一故齊其衆分同其羣母令可相并故曰合分

術曰母互乘子并以為實母相乘為法母互乘子約而

言之者其分麤繁而言之者其分細雖則麤細有殊然其實一也衆分錯雜非細不會乘而散之所以通之通之則可并也凡母互乘子謂之齊羣母相乘謂之同同者相與通同共一母也齊者子與母齊勢不可失本數也方以類聚物以羣分數同類者無遠數異類者無近遠而通體者雖異位而相從也近而殊形者雖同列而相違也然則齊同之術要矣錯綜度數動之則諧其猶佩觿解結無往而不理焉乘以散之約以聚之齊同以通之此其算之綱紀乎其一之術者可令母除爲率率乘子爲齊

實如法而一不滿法者以法命之今欲求其實故齊其子又同其母令如母而一其餘以等數約之即得所謂同法爲母實餘爲子皆從此例

其母同者直相從之

草曰置三分五分在右方之一之二在左方以右方分母五乘左方分子一三分之一得五以

右方分母三乘左方分子二五分之二得六并之得十一爲實右方分母三五相乘得十五爲法實不滿法以法命之爲十五分之十一合問

草曰置三分七分九分在右方之二之四之五在左方以右方分母七乘左方分子二又以右方分母九乘之三分之二得一百二十六以右方分母三乘左方分子四又以右方分母九乘之七分之四得一百八以右方分母三乘左方分子五又以右方分母七乘之九分之五得一百五并之得三百三十九爲實右方分母三七

相乘又以分母九乘之得一百八十九爲法實如法得一又一百八十九分之一百五十子母各以等數三約之爲六十三分之五十合問

草曰置二分三分四分五分在右方之一之二之三之四在左方母互乘子二分之一得六十三分之二得八十四分之三得九十五分之四得九十六并之得三百二十六爲實右方四分母相乘得一百二十爲法實如法得二又一百二十分之八十六子母各半之爲六十分之四十三合問

說曰注云數同類者無遠數異類者無近同類異類指分母言也云遠而通體者雖異位而相從也近而殊形者雖同列而相違也異位同列指分子言也謂分母同者分子雖異位而相從分母異者分子雖同列而相違也云其一術者可令母除爲率率乘子爲齊除者除同也羣母相乘謂之同以各分母除同爲率率乘各分子爲齊不言同者省文也

今有九分之八減其五分之一問餘幾何

荅曰四十五分之三十一

又有四分之三減其三分之一問餘幾何

荅曰十二分之五

減分臣淳風等謹按諸分子母數各不同以
少減多欲知餘幾減餘爲實故曰減分

術曰母互乘子以少減多餘爲實母相乘爲法實如法而一母互乘子者知以齊其子也以少
減多者齊故可相減也母相乘爲
法者同其母也母同子
齊故如母而一即得

草曰置九分五分在右方之八之一在左方母互乘子九分之八得四十五分之一得九以少減多餘三十一爲實母相乘得四十五爲法實不滿法以法命之爲四十五分之三十一合問

草曰置四分三分之三之一在右方之三之一在左方母互乘子四分之三得九三分之一得四以少減多餘五爲實母相乘得十二爲法實不滿法以法命之爲十二分之五合問

今有八分之五二十五分之十六問孰多多幾何

荅曰二十五分之十六多多二百分之三

又有九分之八七分之六問孰多多幾何

荅曰九分之八多多六十三分之二

又有二十一分之八五十分之十七問孰多多幾何

荅曰二十一分之八多多一千五十分之

四十三

課分臣淳風等謹按分各異名理不齊一校其相多之數故曰課分也

術曰母互乘子以少減多餘爲實母相乘爲法

實如法而一即相多也臣淳風等謹按此術母互乘子以少分減多分多與減分義同唯相多之數意共減分有異減分知求其餘數有幾課分知以其餘數相多也

草曰置八分二十五分在右方之五之十六在

左方母互乘子八分之五得一百二十五二十

五分之十六得一百二十八以少減多餘三爲

實母相乘得二百爲法以法命實爲二百分之

三即相多也合問

草曰置九分七分在右方之八之六在左方母
互乘子九分之八得五十六七分之六得五十
四以少減多餘二爲實母相乘得六十三爲法
以法命實爲六十三分之二即相多也合問
草曰置二十一分五十分在右方之八之十七
在左方母互乘子二十一分之八得四百五十
分之十七得三百五十七以少減多餘四十三
爲實母相乘得一千五十爲法以法命實爲一
千五十分之四十三即相多也合問
今有三分之一三分之二四分之三問減多益少各

幾何而平

荅曰減四分之三者二三分之二者一并

以益三分之一而各平於十二分之七

又有二分之一三分之二四分之三問減多益少各

幾何而平

荅曰減三分之二者一四分之三者四并

以益二分之一而各平於三十六分之二

十三

平分 臣淳風等謹按平分者諸分參差欲令齊等減彼之多增此之少故曰平分也

術曰母互乘子 齊其子也 副并爲平實 臣淳風等謹按母互乘子

副并爲平實者定此平實立限衆子所當損益如限爲平

母相乘爲法

母相乘爲法者亦齊其子又同其母

以列數乘未并者各自爲列實亦以列數乘法

此當副并列數爲平實若然則重有分故反以列數乘同濟　臣淳風等謹按問云所平之分多少不定或三或二列位無常平三知置位三重平二知置位二重凡此之例一準平分不可頑定多少故直云列數而已

以平實減列實餘約之爲所減并所減以益於少以法命平實各得其平

淳按此當副并列數爲平實當作此當副置列數除平實

草曰置三分之三分四分之在右方之一之二之三

在左方母互乘子三分之一得十二三分之二得二十四四分之三得二十七副并得六十三爲平實母相乘得三十六爲法以列數三乘未并者三分之一得三十六三分之二得七十二四分之三得八十一亦以列數三乘法得一百八以平實六十三減列實七十二餘九減列實八十一餘十八以等數九約所餘得一與二爲所減亦以等數九約列實三十六得四并所減一與二以加之得七又以等數九約法一百八爲十二以命之是爲減四分之三者二減三分

之二者一并以益三分之一而各平於十二分
之七合問
草曰置二分三分四分在右方之一之二之三
在左方母互乘子二分之一得十二三分之二
得十六四分之三得十八副并得四十六為平
實母相乘得二十四為法以列數三乘未并者
二分之一得三十六三分之二得四十八四分
之三得五十四亦以列數三乘法得七十二以
平實四十六減列實四十八餘二減列實五十
四餘八以等數二約所餘得一與四為所減亦

以等數二約列實三十六得十八并所減一與
四約之得二十三又以等數二約法七十二為
三十六以命之是為減三分之二者一四分之
三者四并以益二分之一而各平於三十六分
之二十三合問

今有七人分八錢三分錢之一問人得幾何
荅曰人得一錢二十一分錢之四

又有三人三分人之一分六錢三分錢之一四分錢
之三問人得幾何
荅曰人得二錢八分錢之

經分臣淳風等謹按經分者自合分已下皆與諸分相齊此乃直求一人之分以人數分所分故曰經分也

術曰以人數爲法錢數爲實實如法而一有分者通之母互乘子者齊其子母相乘者同其母以母通之者分母乘全內子乘散全則爲積分積分則與分子相通故可令相從凡數相與者謂之率率者自相相與通有分則可散分重疊則約也等除法實相與率也故散分者必令兩分母相乘法實也重有分者同而通之又以法分母乘實實分母乘法此謂法實俱有分故令分母各乘全分內子又令分母互乘上下

淳按注故令分母各乘全分內子全分之分字疑衍

草曰置八錢三分錢之二於上位通分內子得二十五爲實置七人於下位亦以分母三乘之得二十一爲法實如法得一錢二十一分錢之四合問

草曰置六錢三分錢之一四分錢之三於上位母互乘子三分之一得四四分之三得九并之得十三爲分子母相乘得十二爲分母通分內子得八十五又以法分母三乘之得二百五十五爲實置三人三分人之一於下位通分內子得一十又以實分母十二乘之得一百二十爲

法實如法得二錢一百二十分錢之十五以等
數十五約分母子爲八分錢之一合問
今有田廣七分步之四從五分步之三問爲田幾何
荅曰三十五分步之十二
又有田廣九分步之七從十一分步之九問爲田幾
何
荅曰十一分步之七
又有田廣五分步之四從九分步之五問爲田幾何
荅曰九分步之四
乘分臣淳風等謹按乘分者分母相乘爲法子相乘爲實故曰乘分

術曰母相乘爲法子相乘爲實實如法而一凡實不滿法者乃有母子之名若有分以乘其實而長之則亦滿法乃爲全耳又以子有所乘故母當報除報除者實如法而一也今子相乘則母各當報除因令分母相乘而連除也此田有廣從難以廣論設有問者曰馬二十匹直金十二斤令賣馬二十匹三十五人分之人得幾何荅曰三十五分斤之十二其爲之也當如經分術以十二斤金爲實三十五人爲法設更言馬五匹直金三斤今賣四匹七人分之人得幾何荅日人得三十五分斤之十二其爲之也當齊其金人之數皆合初問入於經分矣然則分子相乘爲實者猶齊其金也母相乘爲法者猶齊其人也同其母爲二十馬無事於同但欲求齊而已又馬五匹直金三斤完全之率分而言之則爲一匹直金五分斤之三七人之貢四馬一人之貢七分馬之四分子與人交亙相生所從言之異而計數則三術同歸也

草曰置分母七分五分在右方分子之四之三在左方分母相乘得三十五爲法分子相乘得十二爲實實不滿法以法命之爲三十五分步之十二合問

草曰置分母九分十一分在右方分子之七之九在左方分母相乘得九十九爲法分子相乘得六十三爲實法實各以等數九約之爲十一分步之七合問

草曰置分母五分九分在右方分子之四之五在左方分母相乘得四十五爲法分子相乘得

二十爲實法實各以等數五約之爲九分步之

四合問

今有田廣三步三分步之一從五步五分步之二問爲田幾何

荅曰十八步

又有田廣七步四分步之三從十五步九分步之五問爲田幾何

荅曰一百二十步九分步之五

又有田廣十八步七分步之五從二十三步十一分步之六問爲田幾何

荅曰一畝二百步十一分步之七

大廣田臣淳風等謹按大廣田者初術直有全步而無餘分次術空有餘分而無全步此術先見全步復有餘分可以廣兼三術故曰大廣

術曰分母各乘其全分子從之分母各乘其全分子從之者通全步內分子如此則母子皆為實矣相乘為實分母相乘為法猶乘分也實如法而一今為術廣從俱有分當各自通其分命母入者還須出之故令分母相乘為法而連除之

草曰置廣三步以分母三乘之得九分子一從之得一十於上位置從五步以分母五乘之得二十五分子二從之得二十七於下位上下相

乘得二百七十爲實分母三分母五相乘得一
十五爲法實如法而一得十八步合問
草曰置廣七步以分母四乘之得二十八分子
三從之得三十一於上位置從十五步以分母
九乘之得一百三十五分子五從之得一百四
十於下位上下相乘得四千三百四十爲實分
母四分母九相乘得三十六爲法實如法而一
得一百二十步三十六分步之二十分母子各
以等數四約之爲九分步之五合問
草曰置廣十八步以分母七乘之得一百二十

六分子五從之得一百三十一於上位置從二十三步以分母十一乘之得二百五十三分子六從之得二百五十九於下位上下相乘得三萬三千九百二十九爲實分母七分母十一相乘得七十七爲法實如法而一得四百四十步七十七分步之四十九以畝法二百四十步除之得一畝二百步七十七分步之四十九分母子各以等數七約之爲十一分步之七合問

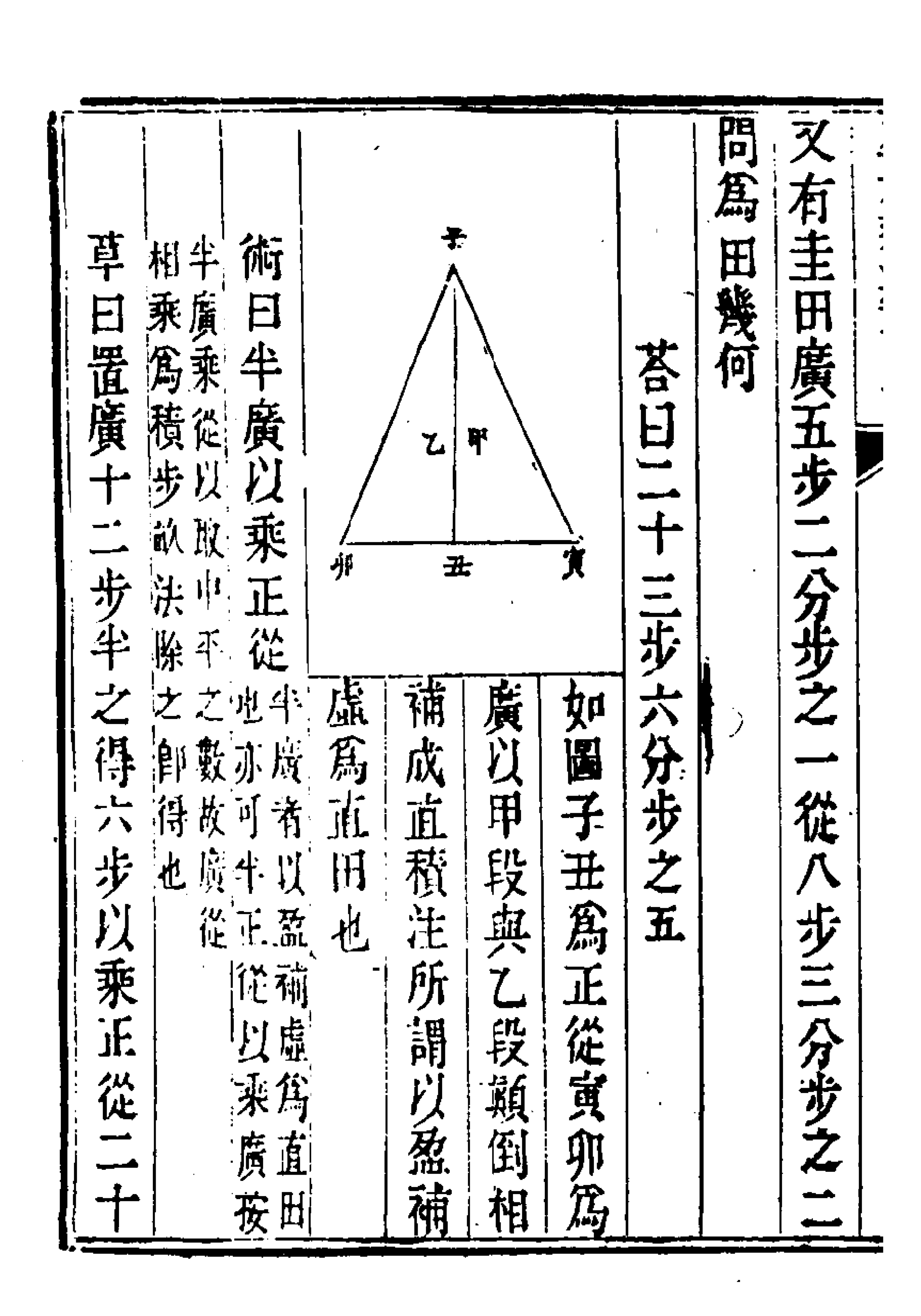
今有圭田廣十二步正從二十一步問爲田幾何

荅曰一百二十六步

又有圭田廣五步二分步之一從八步三分步之二

問爲田幾何

荅曰二十三步六分步之五



如圖子丑爲正從寅卯爲廣以甲段與乙段顛倒相補成直積注所謂以盈補虛爲直田也

術曰半廣以乘正從半廣者以盈補虛爲直田也亦可半正從以乘廣按半廣乘從以取中平之數故廣從相乘爲積步畝法除之即得也

草曰置廣十二步半之得六步以乘正從二十

一步得一百二十六步合問

草曰置廣五步以分母二乘之得十分子一從之得十一於上位置從八步以分母三乘之得二十四分子二從之得二十六半之得十三於下位上下相乘得一百四十三爲實分母二分母三相乘得六爲法實如法得二十三步六分步之五合問

說曰次問廣不可半故半從以乘廣得積步又以廣從俱有分當各自通其分令分母相乘爲法而連除之如前大廣田術也

今有邪田一頭廣三十步一頭廣四十二步正從六十四步問爲田幾何

荅曰九畝一百四十四步

如圖子丑爲一頭廣寅卯爲一頭廣丑寅爲正從移甲段補乙段注所謂以盈補虛也

又有邪田正廣六十五步一畔從一百步一畔從七十二步問爲田幾何

荅曰二十三畝七十步

如圖子丑爲正廣寅丑爲一畔從子卯爲一畔從移甲段補乙段亦是以盈補虛

術曰并兩邪而半之以乘正從若廣又可半正從若廣以乘并畝法而一（并而半之者以盈補虛也）

草曰置一頭廣三十步一頭廣四十二步并之得七十二步半之得三十六步以乘正從六十四步得二千三百四步如畝法二百四十步而一得九畝一百四十四步合問

草曰置一畔從一百步一畔從七十二步并之
得一百七十二步半之得八十六步以乘正廣
六十五步得五千五百九十步如畝法二百四
十步而一得二十三畝七十步合問

今有箕田舌廣二十步踵廣五步正從三十步問為
田幾何

答曰一畝一百三十五步

又有箕田舌廣一百一十七步踵廣五十步正從一
百三十五步問為田幾何

答曰四十六畝二百三十二步半

如圖子寅丑爲舌廣辰卯巳爲踵廣寅卯爲正從甲段一邪田乙段一邪田所謂中分箕田爲兩邪田也

術曰并踵舌而半之以乘正從畝法而一（中分箕田則爲兩邪田故其術相似又可并踵舌半正從以乘之）

草曰置舌廣二十步踵廣五步并之得二十五步半之得十二步半以乘正從三十步得三百七十五步如畝法二百四十步而一得一畝一百三十五步合問

草曰置舌廣一百一十七步踵廣五十步并之得一百六十七步半之得八十三步半以乘正從一百三十五步得一萬一千二百七十二步半如畝法二百四十步而一得四十六畝二百三十二步半合問

今有圓田周三十步徑十步臣淳風等謹按術意以周三徑一爲率周三十步合徑十步今依密率合徑九步十一分步之六問爲田幾何

荅曰七十五步此於徽術當爲田七十一步一百五十七分步之一百三臣淳風等謹依密率爲田七十一步二十二分步之一十三

又有圓田周一百八十一步徑六十步三分步之一

臣淳風等謹按周三徑一周一百八十一步徑六十步三分步之一依密率徑五十七步二十二分步之一十三

問為田幾何

荅曰十一畝九十步十二分步之一此於徽術當為田十畝二百八步三百一十四分步之一百一十三臣淳風等謹依密率當為田十畝二百五步八十八分步之八十七

甲
丁　乙
丙

如圖甲乙丙丁為圓周甲丙乙丁皆圓徑

術曰半周半徑相乘得積步按半周為從半徑為廣故廣從相乘

為積步也假令圓徑二尺圓中容六觚之一面與圓徑之半其數均等合徑率一而外周率三也又按為圖以六觚之一面乘半徑二因而六之得十二觚之冪若又割之次以十二觚之一面乘一觚之半徑四因而六之則得二十四觚之冪割之彌細所失彌少割之又割以至於不可割則與圓周合體而無所失矣觚面之外又有餘徑以面乘徑則冪出觚表若夫觚之細者與圓合體則表無餘徑表無餘徑則冪不外出矣以一面乘半徑觚而裁之每輒自倍故以半周乘半徑而為圓冪此以周徑謂至然之數非周三徑一之率也周三者從其六觚之環耳以推圓規多少之較乃弓之與弦也然世傳此法莫肯精覈學者踵古習其謬失不有所據辯之斯難凡物類形象不圓則方方圓之率誠著於近則雖遠可知也由此言之其用博矣謹按圖驗更造密率恐空設法數昧而難譬故置諸捡括謹詳其記注焉割六觚以為十二觚術曰置圓徑二尺半之為一尺即圓裹六觚之面也令半徑一尺為弦半面五寸為句為之求股以句

冪二十五寸減弦冪餘七十五寸開方除之下至秒忽又一退法求其微數微數無名者以爲分子以下爲分母約作五分忽之二故得股八寸六分六釐二秒五忽五分忽之二以減半徑餘一寸三分三釐九毫九秒四忽五分忽之三謂之小句觚之半面又謂之小股爲之求弦其冪二千六百七十九億四千九百一十九萬三千四百四十五忽餘分弃之開方除之即十二觚之一面也割十二觚以爲二十四觚之術亦令半徑爲弦半面爲句爲之求股置上小弦冪四而一得六百六十九億八千七百二十九萬八千三百六十一忽餘分棄之即句冪也以減弦冪其餘開方除之得股九寸六分五釐九毫二秒五忽五分忽之四以減半徑餘三分四釐七秒四忽五分忽之一謂之小句觚之半面又謂之小股爲之求小弦其冪六百八十一億四千八百三十九萬四千一百六十六忽餘分棄之開方除之即二十四觚之一面也割二十四觚以爲四十八觚術曰亦令半徑爲弦半面爲句爲之求股置上小弦冪四而一得一百七十

億三千七百八萬七千三百六十六忽餘分棄之即句冪也以減弦冪其餘開方除之得股九寸九分一釐四毫四秒四忽五分忽之四以減半徑餘八釐五毫五秒五忽五分忽之一謂之小句觚之半面又謂之小股爲之求小弦其冪一百七十一億一千二十七萬八千八百一十三忽餘分棄之開方除之得小弦一寸三分八毫六忽餘分棄之即四十八觚之一面以半徑一尺乘之又以二十四乘之得冪三萬一千三百九十三億四千四百萬忽以百億除之得冪三百一十三寸六百二十五分寸之五百八十四即九十六觚之冪也割四十八觚以爲九十六觚術曰亦分半徑爲弦半面爲句爲之求股置次上弦冪四而一得四十二億七千七百五十六萬九千七百三忽餘分棄之則句冪也以減弦冪其餘開方除之得股九寸九分七釐八毫五秒八忽十分忽之九以減半徑餘二釐一毫四秒一忽十分忽之一謂之小句觚之半面又謂之小股爲之求小弦其冪四十二億八千二百一十五萬四千一十二忽餘分棄之開方

除之得小弦六分五釐四毫三秒八忽餘分棄之即九十六觚之一面以半徑一尺乘之又以四十八乘之得冪三萬一千四百一十億二千四百萬忽以百億除之得冪三百一十四寸六百二十五分寸之六十四即一百九十二觚之冪也以九十六觚之冪減之餘六百二十五分寸之一百五謂之差冪倍之為分寸之二百一十即九十六觚之外弧田九十六所謂以弦乘矢之凡冪也加此冪於九十六觚之冪得三百一十四寸六百二十五分寸之一百六十九則出於圓之表矣故還就一百九十二觚之全冪三百一十四寸以為圓冪之定率而棄其餘分以半徑一尺除圓冪倍之得六尺二寸八分即周數令徑自乘為方冪四百寸與圓冪相折圓冪得一百五十七為率方冪得二百為率方冪二百其中容圓冪一百五十七也圓率猶為微少按弧田圖令方中容圓圓中容方內方合外方之半然則圓冪一百五十七其中容方冪一百也又令徑二尺與周六尺二寸八分相約周得一百五十七徑得五十則其相與之率也周

率猶爲微少也晉武庫中漢時王莽作銅斛其銘曰律嘉量斛內方尺而圓其外庣旁九釐五毫冪一百六十二寸深一尺積一千六百二十寸容十斗以此術求之得冪一百六十一寸有奇其數相近矣此術微少而斛差冪六百二十五分寸之一百五以十二觚之冪爲率消息當取此分寸之三十六以增於一百九十二觚之冪以爲圓冪三百一十四寸二十五分寸之四置徑自乘之方冪四百寸令與圓冪通相約圓冪三千九百二十七方冪得五千是爲率方冪五千中容圓冪三千九百二十七圓冪三千九百二十七中容方冪二千五百也以半徑一尺除圓冪三百一十四寸二十五分寸之四倍之得六尺二寸八分二十五分寸之八即周數也全徑二尺與周數通相約徑得一千二百五十周得三千九百二十七即其相與之率若此者蓋盡其纖微矣舉而用之上法仍約耳當求一千五百三十六觚之一面而得三千七十二觚之冪而裁其微分數亦宜然重其驗耳　臣淳風等謹按徑術求圓皆以周三徑一爲率若用之

求圓周之數則周少徑多用之求其六觚之田乃與此率合會耳何則假令六觚之田觚閒各一尺爲面自然從角至角其徑二尺可知此則周六徑二與周三徑一已合恐此猶以難覩今更引物爲輸設令刻物作圭形者六枚枚別三面皆長一尺積此六物悉使銳頭向裏則成六觚之周角徑亦皆一尺更從觚角外畔圍繞爲規則六觚之徑盡逵規矣嘗面徑短不至外規若以六觚言之則爲周六尺徑二尺面皆一尺面徑股不至外畔定無二尺可知故周三徑一之率於圓周乃是徑多周少徑一周三理非精密蓋術從脩要舉大綱畧而言之劉徽特以爲疎遂乃改張其率但周徑相乘數難契合徽雖出斯一法終不能究其纖毫也粗沖之以其不精就中更推其數今者修撰據摭諸家考其是非沖之爲密故顯之於徽術之下冀學者之所裁焉

密率求徑草曰置周三十步以徑率七乘之得

二百一十步爲實如周率二十二而一得九步二十二分步之一十二子母各半之爲十一分步之六卽田徑也

草曰置周三十步半之得十五步於上位置徑十步半之得五步於下位上下相乘得七十五步合問

徽術草曰置周三十步自乘得九百步以圓冪率二十五乘之得二萬二千五百步爲實如周冪率三百一十四而一得七十一步三百一十四分步之二百六子母各半之爲一百五十七

分步之一百三

密率草曰置周三十步自乘得九百步以圓冪率七乘之得六千三百步爲實如周冪率八十八而一得七十一步八十八分步之五十二子母各以四約之爲二十二分步之一十三

密率求徑草曰置周一百八十一步以徑率七乘之得一千二百六十七步爲實如周率二十二而一得五十七步二十二分步之一十三卽田徑也

草曰置周一百八十一步半之得九十步半於

上位置六十步三分步之一通分內子得一百八十一分半之得九十分半於下位上下相乘得八千一百九十步四分步之一爲實內寄三爲分母通分內子得三萬二千七百六十一爲定實內又寄四爲分母以分母三四相乘得十二爲法實如法得二千七百三十步十二分步之一如畝法二百四十步而一得十一畝九十步十二分步之一合問

徽術草曰置周一百八十一步自乘得三萬二千七百六十一以圓冪率二十五乘之得八十

一萬九千二十五步如周冪率三百一十四而一得二千六百八步三百一十四分步之一百一十三如畝法二百四十步而一得十畝二百八步三百一十四分步之一百一十三

密率草曰置周一百八十一步自乘得三萬二千七百六十一步以圓冪率七乘之得二十二萬九千三百二十七步爲實如周冪率八十八而一得二千六百五步八十八分步之八十七又如畝法二百四十步而一得十畝二百五步八十八分步之八十七

說曰注云圓中容六弧之一面東原戴氏云六觚原本訛作六弧考六角形其平面亦有六八角形其平面亦有八古人謂之六觚八觚若截圓形爲六古人謂之弧背其弧卽圓周不得云圓中容六弧之一面按此說非也六弧者割全圓爲六弧也圓中容六弧之一面卽弧弦也在弧田則謂之弦在割圓則謂之面義各有屬弧田術有弦有矢不言弧背其弧背直謂之弧沈存中筆談會圓之術云割田之弧云所割之弧云求弧數是南宋時尚不云弧背授時術始有

弧背之名至今因之不得云古人謂之弧背也漢書律歷志之六觚郊祀志之八觚雖訓觚爲角然皆體之稜面如龜觚觚稜之類不得據彼以易此也云六弧之一面與圓徑之半其數均等則六弧之六面爲全徑之三倍可知矣故云合徑率一而外周率三也

如圖作甲乙丙丁戊己圓又作庚丙辛壬癸戊圓庚丙與庚戊皆六弧之一面亦即圓徑之半

云又按爲圖以六弧之一面乘半徑二因而六之得十二弧之冪若又割之矣以十二弧之一面乘一弧之半徑四因而六之則得二十四弧之冪者據下文及徑自乘三之四而一術注校之二因而六之當作因而三之四因而六之當作因而六之後記注割六弧爲十二弧術半徑一尺爲弦半面五寸爲句求得股八寸六分有奇作大句股冪又以股減半徑得股弦差爲小句半面五寸爲小股求得小弦五寸一分有奇爲十二弧之一面作小句股冪并大小二句股

冪爲十二弧之一弧冪今以六弧之一面乘半
徑得十二弧之一弧冪者四故三因之得十二
弧之冪也割十二弧爲二十四弧以下意悉類
此葢以半徑乘一面得大小句股冪各四屢割
之則大股以漸而增小句及小弦以漸而減而
半徑乘一面得大小句股各四之率則不易也
三因四冪得十二弧冪六因四冪得二十四弧
冪十二因四冪得四十八弧冪二十四因四冪
得九十六弧冪四十八因四冪得一百九十二
弧冪皆可推而知

如圖六弧之一面乘半徑得大小句股各四因而三之爲十二弧之冪二十四弧以下皆可類推

云割之彌細所失彌少者以十二弧之冪與圓冪相課所失多以三千七十二弧之冪與圓冪相課所失少云割之又割以至於不可割則與圓周合體而無所失者割之彌細則弧面漸小

而餘徑亦漸小至於不可割則弧面逼近圓周
而合體矣云弧面之外又有餘徑以面乘徑則
冪出弧表者即下注所云以弦乘矢之凡冪也

如圖甲辰為餘徑亦謂之矢
乙巳為弧面亦謂之弦子丑
寅卯四段為以弦乘矢之冪
子丑二段出於弧表

云以一面乘半徑觚而裁之每輒自倍者觚猶
角也觀圖自知云此以周徑謂至然之數者以
猶用也言此所用之周徑乃至密之率非周三

徑一之率也周三者謂合六弧之六面非眞圓周也云以推圓規多少之較乃弓之與弦也者圓規猶圓周也圓周爲弓六弧之面爲弦也

割六弧以爲十二弧草曰令半徑一尺爲弦展爲一十寸自乘得一百寸於上位半面五寸爲句自乘得二十五寸於下位以下減上餘七十五寸開方除之得八寸六分六釐二秒五忽又退法開之議得四命爲十分忽之四約爲五分忽之二卽股也云又以退法者方法一退也云微數無名者以爲分子以下爲分母者得在上

法在下也以股八寸六分六釐二秒五忽五分忽之二減半徑十寸餘一寸三分三釐九毫七秒四忽五分忽之三謂之小句孔刻作九秒者誤也置小句一寸三分三釐九毫七秒四忽五分忽之三自乘得一百七十九億四千九百一十九萬三千四百四十五忽餘分一六於上位置半面五寸為小股展為五十萬忽自乘得二千五百億忽於下位并上下位得二千六百七十九億四千九百一十九萬三千四百四十五忽餘分一六棄之開方除之得五寸二分七釐

六毫三秒八忽謂之小弦餘實九萬四千四百一忽棄之卽十二弧之一面也　割十二弧以爲二十四弧草曰亦令半徑爲弦十二弧之半面爲句爲之求股置上小弦冪二千六百七十九億四千九百一十九萬三千四百四十五忽四而一得六百六十九億八千七百二十九萬八千三百六十一忽餘分二五棄之卽句冪也以減弦冪一萬億忽餘九千三百三十億一千二百七十萬一千六百三十九忽開方除之得九寸六分五釐九毫二秒五忽十分忽之八約

爲五分忽之四卽股也以減半徑十寸餘三分四釐七秒四忽五分忽之一謂之小句自乘得一十一億六千一百五萬一千一百五忽餘分六四於上位又以十二弧之半面爲小股冪其冪六百六十九億八千七百二十九萬八千三百六十一忽於下位并上下位得六百八十一億四千八百三十四萬九千四百六十六忽餘分六四棄之開方除之得二寸六分一釐五秒二忽十分忽之三謂之小弦餘實四萬六千一百三十忽有奇棄之卽二十四弧之一面也

割二十四弧以爲四十八弧草曰亦令半徑爲弦二十四弧之半面爲句爲之求股置上小弦冪六百八十一億四千八百三十四萬九千四百六十六忽四而一得一百七十億三千七百八萬七千三百六十六忽餘分半忽棄之卽句冪也以減弦冪一萬億忽餘九千八百二十九億六千二百九十一萬二千六百三十四忽開方除之得九寸九分一氂四毫四秒四忽十分忽之八約爲五分忽之四卽股也以減半徑十寸餘八氂五毫五秒五忽五分忽之一謂之小

句自乘得七千三百一十九萬一千四百四十七忽餘分零四於上位又以二十四弧之半面爲小股置其羃一百七十億三千七百八萬七千三百六十六忽餘分半忽於下位并上下位得一百七十一億一千二十七萬八千八百一十三忽餘分五四乘之開方除之得一寸三分八毫六八忽謂之小弦餘實一十六萬九千一百七十七忽乘之即四十八弧之一面也置半徑一尺展爲一百萬忽乘之得一千三百八億六百萬忽又以二十四乘之得羃三萬一千三百

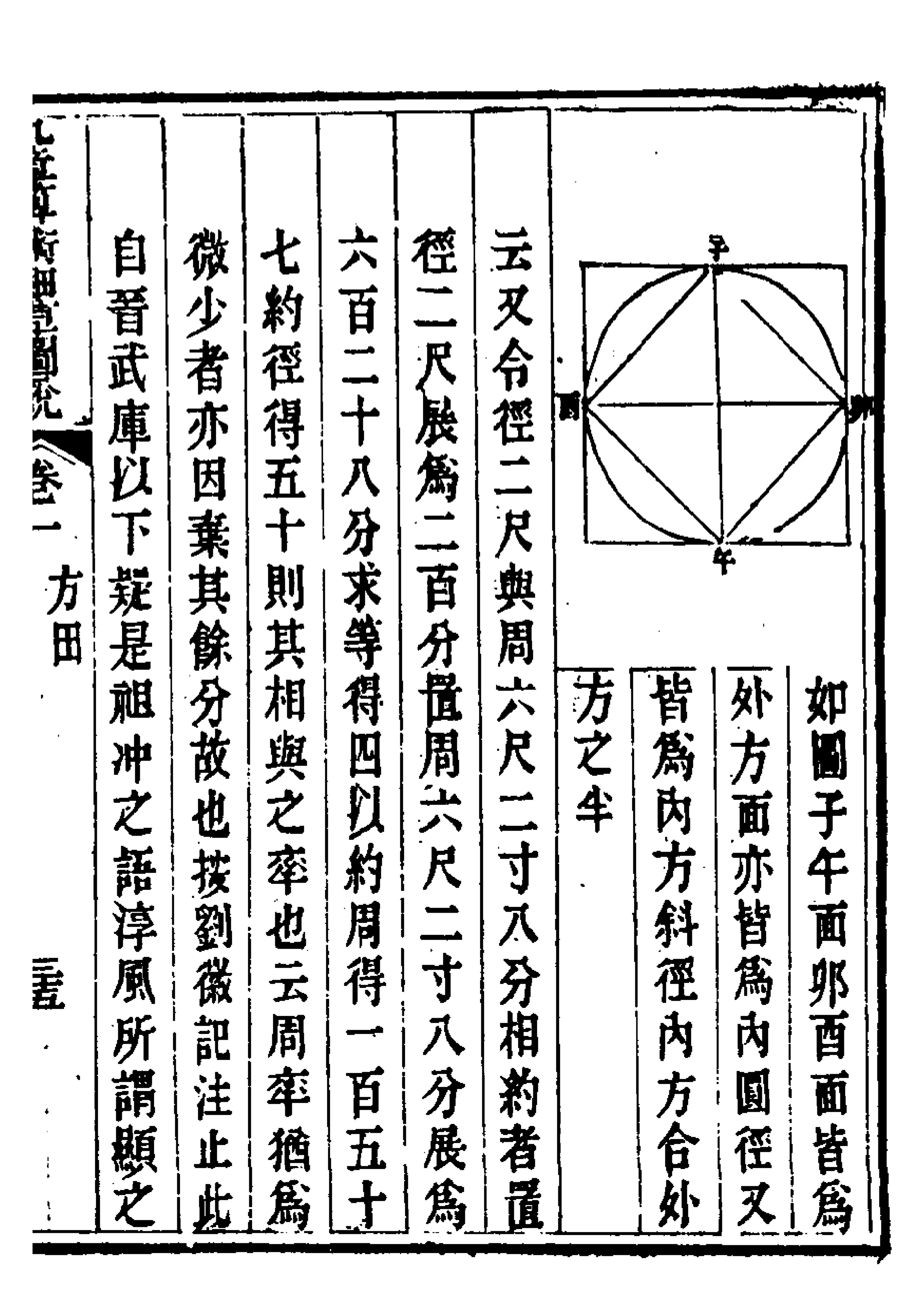
九十三億四千四百萬忽復展一寸為十萬忽自乘得一百億以除之得三百一十三寸二百億分寸之九十三億四千四百萬分母子各以等數一千六百萬約之為六百二十五分寸之五百八十四即九十六弧之冪也　割四十八弧以為九十六弧草曰亦令半徑為弦四十八弧之半面為句為之求股置次上弦冪一百七十一億一千二十七萬八千八百一十三忽四而一得四十二億七千七百五十六萬九千七百三忽餘分二五乘之則句冪也以減弦冪一

萬億忽餘九千九百五十七億二千二百四十三萬二百九十七忽開方除之得九寸九分七釐八毫五秒八忽十分忽之九即股也以減半徑十寸餘二釐一毫四秒一忽十分忽之一謂之小句自乘得四百五十八萬四千三百九忽餘分二一於上位又以四十八弧之半面爲小股置其冪四十二億七千七百五十六萬九千七百三忽於下位并上下位得四十二億八千二百一十五萬四千一十二忽餘分二一棄之開方除之得六分五釐四毫三秒八忽謂之小

弦餘實二萬二千一百六十八忽乘之即九十
六弧之一面也置半徑一尺展爲一百萬忽乘
之得六百五十四億三千八百萬忽又以四十
八乘之得冪三萬一千四百一十億二千四百
萬忽以百億除之得冪三百一十四寸一百億
分寸之一十億二千四百萬分母子各以一千
六百萬約之爲六百二十五分寸之六十四即
一百九十二弧之冪也置一百九十二弧之冪
三百一十四寸六百二十五分寸之六十四以
九十六弧之冪三百一十三寸六百二十五分

寸之五百八十四減之餘六百二十五分寸之
一百五謂之差冪倍之得六百二十五分寸之
二百一十即九十六弧之外弧田九十六所謂
以弦乘矢之凡冪也置九十六弧之冪三百一
十三寸六百二十五分寸之五百八十四以凡
冪六百二十五分寸之二百一十加之得三百
一十四寸六百二十五分寸之一百六十九則
出於圓之表矣故還就一百九十二弧之全冪
三百一十四寸以為圓冪之定率而棄其餘分
置圓冪三百一十四寸展半徑一尺為十寸除

之得三十一寸四分爲半周倍之得六十二寸八分收爲六尺二寸八分即周數也復置圓徑二尺展爲二十寸自乘得四百寸爲方冪與圓冪三百一十四寸求等得二以約圓冪得一百五十七爲率以約方冪得二百爲率方冪二百其中容圓冪一百五十七也圓率猶爲微少者因棄其餘分故也按弧田圖令方中容圓圓中容方內方合外方之半然則圓冪一百五十七其中容方冪一百也者外方二百內方一百是其相與之率也



如圖子午面卯酉面皆爲外方面亦皆爲內圓徑又皆爲內方斜徑內方合外方之半

云又令徑二尺與周六尺二寸八分相約者置徑二尺展爲二百分置周六尺二寸八分展爲六百二十八分求等得四以約周得一百五十七約徑得五十則其相與之率也云周率猶爲微少者亦因棄其餘分故也按劉徽記注止此自晉武庫以下疑是祖冲之語淳風所謂顯之

於觚術之下者也庣者當是內方斜徑與外圓徑之較漢書律歷志旁有庣焉鄭訓爲過顏訓爲不滿之貌義得相通隋書律歷志云祖冲之以圓率考之此斛當徑一尺四寸三分六釐一毫九秒二忽庣旁一分九毫有奇劉歆庣旁少一釐四毫有奇歆算術不精之所致也所謂以圓率考之者置斛冪一百六十二寸以方冪率四百五十二乘之得七萬三千二百二十四寸如圓冪率三百五十五而一得二百六寸二十六分四十七釐八十八毫七十三秒二十三忽

開方除之得斛徑一尺四寸三分六釐一毫九秒二忽於上位置丙方一尺展爲一十寸自乘得一百寸倍之得二百寸開方除之得一尺四寸一分四釐二毫一秒三忽於下位以下減上餘二分一釐九毫七秒九忽半之得一分九毫八秒九忽即庣旁也以九釐五毫減之餘一釐四毫八秒九忽即劉歆庣旁所少數也云以此術求之得冪一百六十一寸有奇其數相近矣者置丙方斜徑一十四寸一分四釐二毫一秒三忽於位倍庣旁九釐五毫得一分九釐加之

得一十四寸三分三釐二毫一秒三忽爲外方面自乘得二百五寸四十分九十九釐五十毫三十三秒六十九忽爲方冪以徽圓冪率一百五十七乘之得三萬二千二百四十九寸三十六分二十二釐二毫八十九秒三十三忽如徽方冪率二百而一得一百六十一寸二十四分六十八釐一十一毫一秒四十四忽六十六微半與斛冪一百六十二寸爲相近矣云此術微少而斛差冪六百二十五分寸之一百五以十二弧之冪爲率消息者十二弧當作一百九十

二弧云當取此分寸之三十六以增於一百九十二弧之冪以爲圓冪三百一十四寸二十五分寸之四者祖氏密率徑一百一十三周三百五十五今設圓徑爲二十寸則其周六十二寸一百一十三分寸之九十四半之得三十一寸一百一十三分寸之四十七以半徑一十寸乘之得三百一十四寸一百一十三分寸之一十八爲圓冪置分子一十八以六百二十五乘之得一萬一千二百五十如分母一百一十三而一得九十九餘分六十三在半法以上收爲一

從九十九得一百以六百二十五命之爲六百二十五分寸之一百并全三百一十四寸得三百一十四寸六百二十五分寸之一百是爲密率之圓冪與一百九十二弧之冪三百一十四寸六百二十五分寸之六十四相課則密率多六百二十五分寸之三十六故取此分寸之三十六以增於一百九十二弧之冪得三百一十四寸六百二十五分寸之一百子母各以二十五約之爲二十五分寸之四是密率之圓冪得三百一十四寸二十五分寸之四也云置徑自

乘之方冪四百寸令與圓冪通相約圓冪三千九百二十七方冪得五千是爲率方冪五千中容圓冪三千九百二十七圓冪三千九百二十七中容方冪二千五百也者置方冪四百寸以分母二十五通之得一萬半之得五千爲方冪率置圓冪三百一十四寸二十五分寸之四通分內子得七千八百五十四半之得三千九百二十七爲圓冪率是爲率方冪五千中容圓冪三千九百二十七內方合外方之半故圓冪三千九百二十七中容方冪二千五百也云以半

徑一尺除圓冪三百一十四寸二十五分寸之四倍之得六尺二寸八分二十五分寸之八即周數也者置圓冪三百一十四寸二十五分寸之四通分內子得七千八百五十四寸爲實置半徑一尺展爲一十寸又以分母二十五乘之得二百五十爲法實如法得三十一寸四分二十五分寸之四倍之得六十二寸八分二十五分寸之八收爲六尺二寸八分二十五分寸之八即周數也云全徑二尺與周數通相約徑得一千二百五十周得三千九百二十七即其相

與之率者置全徑二尺展爲二百分以二十五乘之得五千周數六十二寸八分二十五分寸之八通分內子得一萬五千七百八求等得四約徑五千得一千二百五十爲徑率約周一萬五千七百八得三千九百二十七爲周率云當求一千五百三十六弧之一面得三千七十二弧之冪而裁其餘分者如前法求得一千五百三十六弧之一面四釐九秒〇六一二五八二置半徑一尺展爲一百萬忽乘之得四十億九千六十十一萬二千五百八十二忽又以七百六

十八乘之得三萬一千四百一十五億九千四十六萬二千九百七十六忽以百億除之得冪三百一十四寸一五九〇四六二九七六即三千七十二弧之冪也云六弧之徑盡達規矣當面徑短不至外規者六弧之田以半徑爲弦半面爲句面徑爲股股短不至外規

如圖六弧之田子寅半徑爲弦子丑半面爲句丑寅面徑爲股注所謂面徑股短不至外畔

又術曰周徑相乘四而一此周與上觚同耳周徑相乘各當以半而今周徑兩全故兩母相乘為四以報除之於徽術以五十乘周一百五十七而一即徑也以一百五十七乘徑五十而一即周也新術徑率猶當微少據周以求徑則失之長據徑以求周則失之短諸據見徑以求冪者皆失之於微少據周以求冪者皆失之於微多 臣淳風等謹依密率以七乘周二十二而一即徑以二十二乘徑七而一即周依術求之即得

草曰置周三十步於上位徑十步於下位上下相乘得三百步為實四而一得七十五步合問

草曰置周一百八十一步於上位置徑六十步三分步之一通分內子得一百八十一於下位上下相乘得三萬二千七百六十一步為實以

分母三乘四得十二爲法實如法得二千七百
三十步十二分步之一如畝法二百四十步而
一得十一畝九十步十二分步之一合問
說曰依密率以七乘周二十二而一即徑以二
十二乘徑七而一即周者此約率也唐宋算家
皆以徑七周二十二爲密率今按依密率當以
一百一十三乘周三百五十五而一即徑以三
百五十五乘徑一百一十三而一即周
又術曰徑自相乘三之四而一按圓徑自乘爲外方三之四而
一者是爲圓居外方四分之三也若令六觚之一面乘半徑其冪即外方四分之一也因而三

之即亦居外方四分之三也是為圓裏十二觚之冪耳取以為圓失之於微少於徽新術當徑自乘又以一百五十七乘之二百而一　臣淳風等謹按密率令徑自乘以十一乘之十四而一即圓冪也

草曰置徑十步自乘得一百步三之得三百步為實四而一得七十五步合問

草曰置徑六十步三分步之一通分內子得一百八十一自乘得三萬二千七百六十一本當以三乘之今省不乘即以三萬二千七百六十一步為實本當以分母相乘乘四為法今但以分母三乘四得十二為法實如法合問

說曰按密率令徑自乘以十一乘之十四而一卽圓冪也者此亦約率也設圓徑一十四周四十四徑自乘得一百九十六爲方冪半周半徑相乘得一百五十四爲圓冪求等得十四以約方冪得十四爲方冪率以約圓冪得十一爲圓冪率今按依密率當令徑自乘以三百五十五乘之四百五十二而一卽圓冪也設圓徑二百二十六圓周七百一十徑自乘得五萬一千七十六爲方冪半周半徑相乘得四萬一百一十五爲圓冪求等得一百一十三以約方冪得四

百五十二爲方冪率以約圓冪得三百五十五

爲圓冪率

又術曰周自相乘十二而一六觚之周其於圓徑三與一也故六觚之周自相乘爲冪若圓徑自乘者九方九方凡爲十二觚者十有二故曰十二而一卽十二觚之冪也今此令周自乘非但若爲圓徑自乘者九方而已然則十二而一所得又非十二觚之類也若欲以爲圓冪失之於多矣以六觚之周十二而一可也於徽新術直令圓周自乘又以二十五乘之三百一十四而一得圓冪其率三百一十四者周自乘之冪也置周數六尺二寸八分令自乘得冪三十九萬四千三百八十四分又置圓冪三萬一千四百分皆以一千二百五十六約之得此率　臣淳風等謹按方面自乘卽得其積圓周求其冪假率乃通但此術所求用三一爲率圓田正法半周及半徑以相乘今乃用全周自乘故須以十二爲母何者據

全周而求半周則須以二爲法就全周而求半徑復假六以除之是二六相乘除周自乘之數依密率以七乘之八十八而一

潢按劉注其率下脫二十五者圓冪也七字

草曰置周三十步自乘得九百步爲實十二而一得七十五步合問

草曰置周一百八十一步自乘得三萬二千七百六十一步爲實十二而一得二千七百三十步如畝法二百四十步而一得十一畝九十步十二分步之一合問

說曰云六觚之周自相乘爲冪若圓徑自乘者

九方九方九方凡爲十二觚者十有二者古率徑一
周三周自乘爲徑自乘之九倍徑冪居周冪九
分之一圓冪居方冪四分之三以乘分術入之
圓冪居周冪三十六分之三子母各以三約之
爲十二分之一是周冪爲圓冪之十二倍故周
自相乘十二而一得圓冪也云其率二十五者
圓冪也三百一十四者周自乘之冪也者置周
數六尺二寸八分展爲六百二十八分自乘得
三十九萬四千三百八十四分爲周冪置半周
三百一十四分又置半徑一尺展爲一百分以

乘之得三萬一千四百分爲圓冪各以等數一千二百五十六約之得三百一十四爲周冪率得二十五爲圓冪率云依密率以七乘之八十八而一者此亦約率也設圓徑一十四圓周四十四半周半徑相乘得一百五十四爲圓冪周自乘得一千九百三十六爲周冪各以等數二十二約之得七爲圓冪率得八十八爲周冪率今按依密率置周自乘以一百一十三乘之一千四百二十而一即圓冪也設圓徑二百二十六圓周七百一十半周半徑相乘得四萬一百

一十五爲圓冪周自乘得五十萬四千一百爲周冪各以等數三百五十五約之得一百一十三爲圓冪率得一千四百二十爲周冪率以密率徑一百一十三周三百五十五與約率徑七周二十二相課約周强七百九十一分之一與徽術徑五十周一百五十七相課徽周弱五千六百五十分之九强弱相課弱多三萬九千五百五十分之二十三或謂徽率密於約率非確論也

今有宛田下周三十步徑十六步問爲田幾何

答曰一百二十步

又有宛田下周九十九步徑五十一步問爲田幾何

答曰五畝六十二步四分步之一

戊
乙
甲
丙
丁

如圖甲乙丙丁爲宛田下周甲戊丙爲宛田徑

術曰以徑乘周四而一此術不驗故推方錐以見其形假令方錐下方六尺高四尺四尺爲股下方之半三尺爲句正面邪爲弦弦五尺也令句弦相乘四因之得六十尺即方錐四面見者之冪若令其中容圓錐圓錐見冪與方錐見冪其率猶方冪之與圓冪

也按方錐下六尺則方周二十四尺以五尺乘而半之則亦方錐之見冪故求圓錐之數折徑以乘下周之半即圓錐之冪也今宛田上徑圜穹而與圓錐同術則冪失之於少矣然其術難用故略舉大較施之大廣田也求圓錐之冪猶求圓田之冪也今用兩全相乘故以四爲法除之亦如圓田矣開立圓術說圓方諸率甚備可以驗此

草曰置下周三十步於上位徑十六步於下位上下相乘得四百八十步四而一得一百二十步合問

草曰置下周九十九步於上位徑五十一步於下位上下相乘得五千四十九步四而一得一千二百六十二步四分步之一　如畝法二百四

十步而一得五畝六十二步四分步之一合問

說曰折徑者以邪弦爲半徑也平方平圓之半徑爲直徑方錐圓錐之半徑爲折徑今法渾圓面任割一分欲求面分之容則取自正頂至所割圓界之度爲半徑作平圓其容相等即邪弦爲半徑之法也

今有弧田弦三十步矢十五步問爲田幾何

答曰一畝九十七步半

又有弧田弦七十八步二分步之一矢十三步九分步之七問爲田幾何

答曰二畝一百五十五步八十一分步之五十六

如圖甲乙丙為弧田甲丙為弦丁乙為矢

術曰以弦乘矢矢又自乘并之二而一方中之圓圓裏十二觚之冪合外方之冪四分之三也方中令外方之半則朱實合外方四分之一也弧田半圓之冪也故依半圓之體而為之術以弦乘矢而半之則為黃冪矢自乘而半之之為二青冪青黃相連為弧體弧體法當應規今弧為一面不王外畔失之於少矣圓田舊術以周三徑一為率俱

得十二觚之冪亦失之於少也與此相似指驗半圓之弧耳若不滿半圓者益復疎闊宜依句股鋸圓材之術以弧弦爲鋸道長以矢爲句深而求其徑既知圓徑則弧可割分也割之者半弧田之弦以爲股其矢爲句爲之求弦即小弧之弦也以半小弧之弦爲句半圓徑爲弦爲之求股以減半徑其餘即小弦之矢也割之又割使至極細但舉弦矢相乘之數則必近密率矣然於算數差繁必欲有所尋究也若但度田取其大數舊術爲約耳

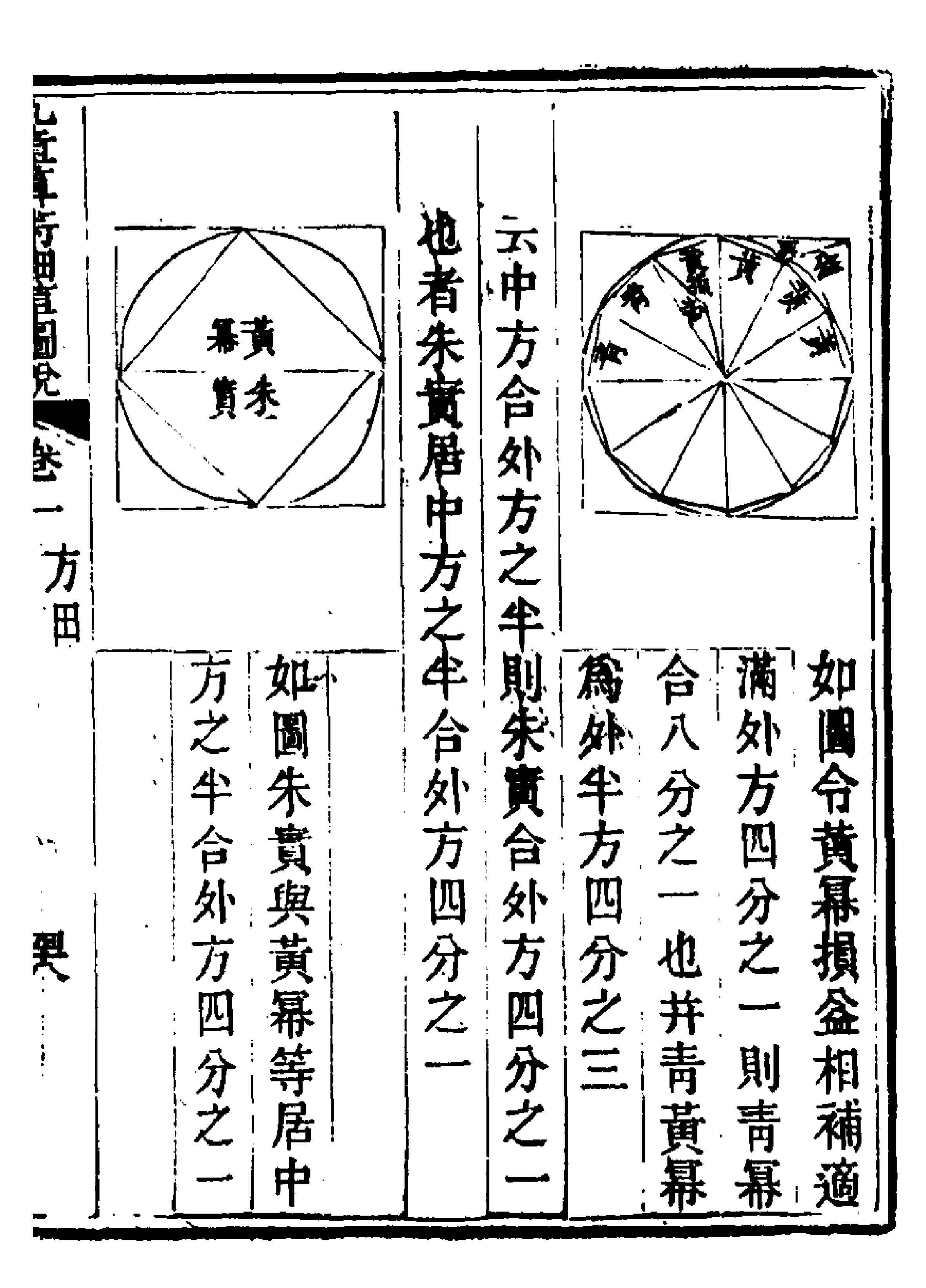
潢按方中合外方之半方中當作中方以矢爲句深句當作鋸半圓徑爲弧弧當作弦即小弦之矢也弦當作弧

草曰置弦三十步於上位矢十五步於下位上下相乘得四百五十步於中位矢又自乘得二

百二十五步并中得六百七十五步二而一得
三百三十七步半如畝法二百四十步而一得
一畝九十七步半合問
草曰置弦七十八步二分步之一通分內子得
一百五十七分於上位又置矢十三步九分步
之七通分內子得一百二十四分於下位上下
相乘得一萬九千四百六十八分為實兩母相
乘得十八為法除之得一千八十一步十八分
步之一十約為九分步之五為矢乘弦冪下位
自乘得一萬五千三百七十六分為實矢母九

自乘得八十一爲法除之得一百八十九步八十一分步之六十七爲矢自乘冪并兩冪得一千二百七十一步八十一分步之三十一二而一得六百三十五步八十一分步之五十六如畝法二百四十步而一得二畝一百五十五步八十一分步之五十六合問

說曰注云方中之圓圓裏十二弧之冪合外方之冪四分之三也者外方容十二弧冪之十六圓裏容十二弧冪之十二十六分之十二約之爲四分之三也



如圖令黃冪損益相補適滿外方四分之一則青冪合八分之一也并青黃冪爲外半方四分之三

云中方合外方之半則朱實合外方四分之一也者朱實居中方之半合外方四分之一

如圖朱實與黃冪等居中方之半合外方四分之一

云弧田半圓之冪也故依半圓之體而爲之術以弦乘矢而半之則爲黃冪矢自乘而半之爲二青冪青黃相連爲弧體者如前圖黃冪居十二弧冪之四二青冪居十二弧冪之二青黃相連者以二青冪附於黃冪之兩旁得十二弧冪之半而爲弧體

如圖弧田半圓之冪也以二青冪附於黃冪之兩旁得十二弧冪之半而爲弧體弧面不至外畔

云弧體法當應規今弧面不至外畔失之於少
者弧體得十二弧冪之半較半圓冪少六小弧
矢冪故爲失之於少云若不滿半圓者益復疎
濶宜依句股鋸圓材之術以弧弦爲鋸道長以
矢爲鋸深而求其徑者句股章鋸圓材術半鋸
道自乘如深寸而一以深寸增之卽材徑是句
與股弦差求弦術也云既知圓徑至則必近密
率矣者與前記注割圓之術同也
今有環田中周九十二步外周一百二十二步徑五
步此欲令與周三徑一之率相應故言徑五步也據中外周以徽術言之當徑四步一百五十七分步

之一百二十二也　臣淳風等謹按依密率合徑四步二十二分步之十七　問爲田幾何

答曰二畝五十五步　於徽術當爲田二畝三十一步一百五十七分步之二十三　臣淳風等謹依密率爲田二畝三十步二十二分步之十五

如圖甲乙丙丁爲外周庚辛壬癸爲中周甲庚乙辛壬丙癸丁皆徑也并中外周而半之以徑乘之爲積

又有環田中周六十二步四分步之三外周一百一十三步二分步之一徑十二步三分步之二　此田環而不通匝故徑十二步三分步之二若據上周求徑者此徑失之於多過周三徑一之率蓋爲踈矣於徽術當徑

八步六百二十八分步之五十一　臣淳風等謹按依周三徑一者之合徑八步二十四分步之一十一依密率合徑八步一百七十六分步之一十三　問爲田幾何

答曰四畝一百五十六步四分步之一於徽術當爲田二畝二百三十二步五千二十四分步之七百八十七也依周三徑一爲田三畝二十五步六十四分步之二十五臣淳風等謹按密率爲田二畝二百三十一步一千四百八分步之七百一十七也

如圖甲丙爲中周乙丁爲外周甲乙丙丁皆徑也惟環而不通匝故徑失之於多而過周三徑一之率

術曰并中外周而半之以徑乘之為積步此田截齊中外之周周則為長并而半之者亦以盈補虛也此可令中外周各自為圓田以中圓減外圓餘則環實也按此術置中外周步數於上分母子於下母乘子者為中外周俱有餘分故以互乘齊其子母相乘同其母子齊母同故通全步內分子并而半之者以盈補虛得中平之周周則為從徑則為廣故廣從相乘而得其積既合分母還須分母出之故令周徑分母相乘而連除之即得積步不盡以等數除之而命分以畝法除積步得畝數也

密率術曰置中外周步數分母子各居其下母互乘子分母相乘通全步內分子并而半之又可以中周減外周餘半之以益中周徑亦通分內子以乘周為實分母相乘為法除之為積步

餘積步之分等數約之以畝法除之即畝數也

淳按此田截齊中外之周至餘則環實也劉徽注當止此自按此術以下是李淳風注當在密率術下密率術一節是淳風補術上注乃其自注也

古率求徑草曰置中周九十二步三而一得三十步三分步之二於上位又置外周一百二十二步三而一得四十步三分步之二於下位上下相減餘十步半之得五步即徑也

據術求徑草曰置中周九十二步以五十乘之

得四千六百步一百五十七而一得二十九步
一百五十七分步之四十七於上位又置外周
一百二十二步以五十乘之得六千一百步一
百五十七而一得三十八步一百五十七分步
之一百三十四於下位上下相減餘九步一百
五十七分步之八十七半之得四步一百五十
七分步之一百二十二即徑也
術率求徑草曰置中周九十二步以七乘之得
六百四十四步二十二而一得二十九步二十
二分步之六於上位又置外周一百二十二步

以七乘之得八百五十四步二十二而一得三十八步二十二分步之十八於下位上下相減餘九步二十二分步之十二半之得四步二十二分步之十七即徑也

爲田草曰置中周九十二步外周一百二十二步并之得二百一十四步半之得一百七步以徑五步乘之得五百三十五步以畝法二百四十步除之得二畝五十五步合問

緻術爲田草曰如前求到一百七步於上位置徑四步一百五十七分步之一百二十二通分

丙子得七百五十步於下位上下相乘得八萬二百五十步爲實以分母一百五十七爲法除之得五百一十一步一百五十七分步之二十三又以畝法二百四十步除之得二畝三十一步一百五十七分步之二十三

密率爲田草曰如前求到一百七步於上位置徑四步二十二分步之十七通分內子得一百五步於下位上下相乘得一萬一千二百三十五步爲實以分母二十二爲法除之得五百一十步二十二分步之十五又以畝法二百四十

步除之得五畝三十步二十二分步之十五

古率求徑草曰置中周六十二步於右上四分步之三居其下又置外周一百一十三步於左上二分步之一居其下母互乘子四分之三得六二分之一得四母相乘得八乃置中周六十二步八分步之六通全步內分子得五百二十分爲實以分母八乘三得二十四爲法除之得二十步二十四分步之二十二於上位又置外周一百一十三步八分步之四通全步內分子得九百八分爲實以法二十四除之得三十七步

二十四分步之二十於下位上下相減餘十六步之二十四分步之二十二半之得八步二十四分步之一十一卽徑也今徑十二步三分步之二多四步二十四分步之五過周三徑一之率矣故知此田環而不通匝

徽術求徑草曰如前求到中周五百二分以五十乘之得二萬五千一百分爲實以分母八乘一百五十七得一千二百五十六爲法除之得十九步一千二百五十六分步之一千二百三十六於上位如前求到外周九百八分以五十

乘之得四萬五千四百分爲實以法一千二百五十六除之得三十六步一千二百五十六分步之一百八十四於下位上下相減餘十六步一千二百五十六分步之二百四半之得八步一千二百五十六分步之一百二子毋各半之爲六百二十八分步之五十一卽徑也
密率求徑草曰如前求到中周五百二分以七乘之得三千五百一十四分爲實以分毋八乘二十二得一百七十六爲法除之得十九步一百七十六分步之一百七十於上位如前求到

外周九百八分以七乘之得六千三百五十六分爲實以法一百七十六除之得三十六步一百七十六分步之二十於下位上下相減餘十六步一百七十六分步之二十六半之得八步一百七十六分步之一十三即徑也

爲田草曰如前求到中周分五百二外周分九百八并之得一千四百一十分半之得七百五分於上位置徑十二步三分步之二通分內子得三十八分於下位上下相乘得二萬六千七百九十分爲實以分母八乘分母三得二十四

爲法除之得一千一百一十六步二十四分步之六子母各以六約之爲四分步之一又以畝法二百四十步除之得四畝一百五十六步四分步之一合問

徽術爲田草曰如前求到中外周分并而半之得七百五分於上位置徑八步六百二十八分步之五十一通分內子得五千七十五於下位上下相乘得三百五十七萬七千八百七十五分爲實以分母八乘六百二十八得五千二十四爲法除之得七百一十二步五千二十四分

步之七百八十七又以畝法二百四十步除之
得二畝二百三十二步五千二十四分步之七
百八十七

古率爲田草曰如前置七百五分於上位置徑
八步二十四分步之一十一通分內子得二百
三分於下位上下相乘得一十四萬三千一百
一十五分爲實以分母八乘二十四得一百九
十二爲法除之得七百四十五步一百九十二
分步之七十五子母各以三約之爲六十四分
步之二十五又以畝法二百四十步除之得三

畝二十五步六十四分步之二十五

密率爲田草曰如前置七百五分於上位置徑八步一百七十六分步之一十三通分内子得一千四百二十一分於下位上下相乘得一百萬一千八百五分爲實以分母八乘一百七十六得一千四百八爲法除之得七百一十一步一千四百八分步之七百一十七又以畝法二百四十步除之得二畝二百三十一步一千四百八分步之七百一十七

說曰此可令中外周各自爲圓田以中圓減外

圖餘則環實也者如第一問置中周九十二步自乘得八千四百六十四步十二而一得七百五步十二分步之四爲中圓於上位又置外周一百二十二步自乘得一萬四千八百八十四步十二而一得一千二百四十步十二分步之四爲外圓於下位以上減下餘五百三十五步以畝法二百四十步除之得二畝五十五步即環實也餘皆倣此

門下晚學生沈欽裴算校